

УДК 533

**РАСЧЕТ РАДИАЛЬНОГО СХОЖДЕНИЯ И ФОКУСИРОВКИ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОЛОСТИ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА<sup>1)</sup>****Т.Ф. ХАЛИТОВА***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань**E-mail: taliny@mail.ru***COMPUTATION OF CONVERGENCE AND FOCUSING OF A NONSPHERICAL SHOCK WAVE IN THE CAVITY OF A CAVITATION BUBBLE****T.F. KHALITOVA***Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan***Аннотация**

Предлагается методика численного исследования радиального схождения и фокусировки несферической ударной волны в полости осесимметричного кавитационного пузырька. Изучается влияние несферичности пузырька в начале сжатия на деформации ударной волны, возникающей в полости пузырька в финале сжатия.

**Ключевые слова:** Кавитационный пузырек, ударная волна, деформации межфазной границы, метод Годунова

**Summary**

A numerical technique for studying radial convergence and focusing of a non-spherical shock wave in the cavity of an axially-symmetric cavitation bubble is proposed. The influence of non-sphericity of the bubble in the beginning of its compression on the deformation of the shock wave arising in the bubble during its final compression stage is investigated.

**Key words:** Cavitation bubble, shock wave, interphase deformations, Godunov method.

**Введение**

В результате схождения и фокусировки ударной волны в полости кавитационного пузырька значительно более сильному сжатию подвергается среда в центральной области пузырька. Существующие теоретические оценки экстремальных значений параметров (давления, плотности, температуры) в этой области получены в предположении сферической формы ударной волны [1]. Однако, в реальности форма ударной волны не является чисто сферической. Более того, для однородных сред установлено, что малые возмущения сферичности ударной волны по мере ее схождения к центру сильно возрастают [2]. Степень сжатия среды внутри пузырька зависит от формы ударной волны. Поэтому радиальное схождение и фокусировка несферической ударной волны в полости кавитационного пузырька представляет значительный интерес. Насколько известно автору, этот вопрос в литературе еще не рассматривался.

В настоящей работе фокусировка радиально сходящейся несферической ударной волны моделируется на основе уравнений газовой динамики. Используемая модель представляет собой обобщение модели Р.И. Нигматулина [1] сильного сжатия сферического кавитационного пузырька на двумерный (осесимметричный) случай. В ней учитываются нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесность испарения и конденсации на межфазной поверхности, применяются реалистичные широкодиапазонные

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-2244.2014.1

уравнения состояния [1]. Предлагаемая методика расчета является по-существу развитием разработанной ранее методики расчета распространения ударной волны в пузырьке [3]. Решение находится численно с применением TVD-модификации схемы Годунова второго порядка точности по пространству и времени. В работе [3] двумерные уравнения газовой динамики записываются в подвижной системе координат, связанной с поверхностью пузырька. При этом в качестве неподвижной системы отсчета (системы отсчета наблюдателя) принимается сферическая система. Кроме того, используются криволинейные радиально-расходящиеся от центра пузырька расчетные сетки, которые в случае малой несферичности пузырька и ударной волны являются весьма близкими к оптимальным. Однако, с увеличением несферичности ударной волны их эффективность падает. В настоящей работе для повышения экономичности расчетов предлагается после того, как величина отклонений формы ударной волны превысит некоторый порог, в центральной области пузырька криволинейную радиально расходящуюся сетку заменять на прямолинейную косоугольную сетку, близкую к декартовой. Пересчет параметров ячеек при такой замене сетки будет проводиться с применением метода консервативной интерполяции первого порядка точности [4]. В качестве неподвижной системы отсчета (системы отсчета наблюдателя) рекомендуется использовать не сферическую, а цилиндрическую систему координат. Для демонстрации работоспособности методики с предлагаемыми модификациями приводятся результаты расчета задачи о фокусировке радиально сходящейся ударной волны, возникающей в полости кавитационного пузырька при его сильном сжатии в том случае, когда пузырек в начале сжатия имеет малую эллипсоидальную несферичность.

### 1. Математическая модель.

Рассматривается радиально схождение и фокусировка несферической осесимметричной ударной волны, возникающей внутри кавитационного пузырька при его сильном сжатии в неограниченном объеме жидкости. Движение пара в пузырьке и окружающей жидкости описывается двумерными уравнениями динамики невязкого теплопроводного газа, которые в компактной бескоординатной записи имеют следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u} - \kappa \nabla T) = 0, \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — вектор скорости частицы среды,  $p$  — давление,  $E$  — удельная полная энергия,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $T$  — температура,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Для замыкания системы (1) применяются широкодиапазонные уравнения состояния жидкости и пара в виде  $p = p(\rho, T)$ ,  $e = e(\rho, T)$  в форме Ми-Грюнайзена [1].

Граничные условия на поверхности пузырька  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^b$  имеют вид

$$\rho^+ (\mathbf{D} - \mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} = \rho^- (\mathbf{D} - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = j, \quad p^+ = p^-, \quad (2)$$

$$(\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n})^+ - (\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n})^- = jl, \quad T^+ = T^-, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки пространства,  $\mathbf{D} = \partial \mathbf{r}^b / \partial t = D\mathbf{n}$  — скорость элемента поверхности пузырька,  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль,  $l$  — теплота парообразования,  $j$  — интенсивность фазовых превращений (испарения или конденсации), отнесенная к единице времени и единице поверхности. Верхний знак плюс указывает на отношение к стороне жидкости, а минус — к стороне газа. Интенсивность фазовых преобразований определяется по формуле Герца-Кнудсена-Ленгмюра [1]. На удалении от пузырька  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^\infty$  считаются известными давление  $p^\infty$  и температура  $T^\infty$ .

### 2. Методика расчета.

Методика расчета настоящей работы является по-существу развитием методики, предложенной в работе [3]. Модификации касаются лишь финальной стадии фокусировки несферической ударной волны. Ниже приведем сначала основные положения методики работы [3], а затем опишем предлагаемые модификации. Согласно работе [3] система (1)–(3) решается в два этапа с расщеплением по физическим процессам. На первом этапе не учитываются тепловые потоки. Решение находится численно с помощью модификации метода Годунова второго порядка точности по пространству и времени на основе не увеличивающей полную вариацию (TVD — Total Variation Diminishing) схемы. На втором этапе поле полной

энергии корректируется с учетом тепловых потоков, которые определяются из уравнения теплопроводности по неявной схеме переменных направлений. Шаг по времени рассчитывается из условия Куранта первого этапа.

В методике [3] используются криволинейные радиально-расходящиеся сетки, одно семейство сеточных линий которых определяется формой пузырька, а другое представляет собой лучи, выходящие из центра пузырька. Для корректного описания тонких тепловых пограничных слоев радиальный размер ячеек значительно уменьшается около поверхности пузырька как в жидкости, так и в паре. После образования в паре ударной волны соответствующая сетка по радиальной координате постепенно трансформируется в равномерную. Структура сетки, используемая в финале сжатия в методике [3], показана на рис. 1 а для случая сфероидального пузырька. Видно, что расчетная область состоит из двух зон: зоны пара и зоны жидкости. В зоне пара сетка по радиальной координате близка к равномерной, а в зоне жидкости имеется сгущение к поверхности пузырька.

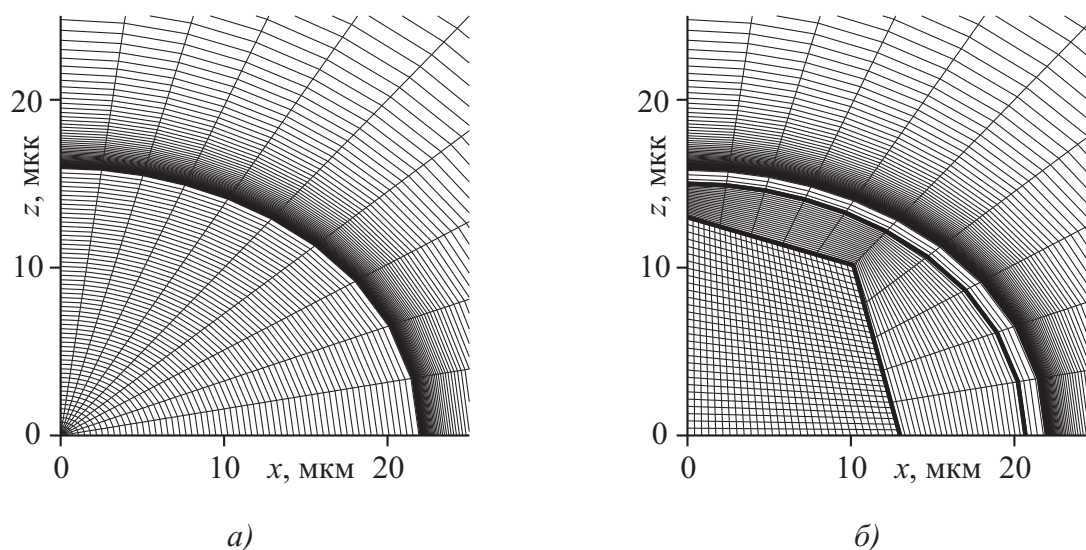


Рис. 1: Фрагменты расчетных сеток криволинейной радиально-расходящейся (а) и смешанной (б) конфигурации в один и тот же момент времени. Сетки разрежены в 5 раз в каждом направлении.

Радиально-расходящиеся сетки (рис. 1а) эффективны лишь до тех пор, пока форма фронта ударной волны близка к форме ее координатных линий и пока в окрестности центра пузырька, где ячейки сильно вытянуты вдоль радиальной координаты, распределения газодинамических параметров близки к однородным. При сильной несферичности ударной волны, когда некоторые части ее фронта становятся близкими к фронту плоских или цилиндрических волн, более эффективными становятся сетки, близкие к равномерным декартовым. Равномерные декартовы сетки также более эффективны, когда в окрестности центра пузырька возникают большие градиенты газодинамических параметров.

В методике настоящей работы для повышения эффективности в момент времени, когда величина отклонения ударной волны от сферической формы превышает некоторое пороговое значение, делается переход со старой сетки радиально-расходящейся конфигурации (рис. 1а) на новую сетку смешанной конфигурации (рис. 1б). При построении новой сетки предлагается расчетную область разделить на 4 зоны: центральную зону, переходную зону, приграничную зону пара и зону жидкости. В центральной зоне (в окрестности центра пузырька) фрагмент старой криволинейной радиально-расходящейся сетки заменятся на фрагмент новой прямолинейной сетки, которая близка к равномерной декартовой. В приграничной зоне пара (небольшой области в паре, которая граничит с жидкостью) и в области жидкости новая расчетная сетка совпадает со старой сеткой радиально-расходящейся конфигурации. Для обеспечения плавного изменения размеров ячеек при переходе от новой прямолинейной сетки к старой радиально-расходящейся

сетке вводится переходная зона. В этой зоне сетка имеет старую криволинейную структуру, но размер ячеек отличается от ячеек старой сетки. Границы между зонами выделены на рис. 1б жирными линиями. Размеры центральной зоны выбираются примерно в два раза превышающими радиус ударной волны. При переходе с сетки одной структуры на сетку другой структуры применяется метод консервативной интерполяции первого порядка точности [4]. Сферическая система наблюдателя близка к оптимальной лишь тогда, когда процесс сжатия пузырька близок к сферическому. Кроме того, при наличии градиентов газодинамических параметров в начале сферической системы координат усложняется формулировка и реализация граничных условий. Поэтому одновременно с переходом на расчетную сетку новой структуры сферическая система наблюдателя заменяется на цилиндрическую.

При расчете на сетке новой смешанной конфигурации тепловые потоки вычисляются с помощью более простой явной схемы. Это не вносит дополнительных ограничений на шаг по времени в силу "жесткости" условия Куранта первого этапа из-за больших скоростей в окрестности фронта ударной волны.

### 3. Иллюстрация применения метода.

Для демонстрации работоспособности предлагаемой методики расчета рассматривается задача о сильном сжатии кавитационного пузырька в дейтерированном ацетоне в осесимметричной постановке в случае, когда сходящаяся ударная волна в пузырьке в конце фокусировки становится сильно несферической. До начального момента времени ( $t = 0$ ) осесимметричный пузырек расширялся. В момент  $t = 0$  расширение прекращается, радиус пузырька  $R$  становится равным  $R^0 = 500$  мкм, радиальная скорость  $\dot{R}$  равна нулю, температура  $T$  пара и жидкости равна  $T^\infty = 273.15$  К, давление  $p$  пара равно давлению насыщения  $p_S^0 = 0.088$  атм. Давление в жидкости  $p^\infty$  на удалении от пузырька в процессе сжатия считается постоянным и равным 15 атм. В финальной стадии сжатия в паре формируется ударная волна, сходящаяся к центру  $r = 0$ . В начале сжатия пузырек сфероидальный, мало отличающийся от сферического, поэтому его форму можно описать выражением  $r = R^0 (1 + \varepsilon_2^0 P_2(\cos \theta))$ , где  $\varepsilon_2^0$  — амплитуда относительного отклонения от сферы в виде полинома Лежандра второй степени  $P_2$  от  $\cos \theta$  (при  $\varepsilon_2^0 > 0$  — сфероид вытянутый, при  $\varepsilon_2^0 < 0$  — сплюснутый). Задача решалась при  $\varepsilon_2^0 = \pm 0.0033$ . Результаты расчета являются сошедшимися по сетке в том смысле, что они качественно не изменяются при дальнейшем измельчении сетки.

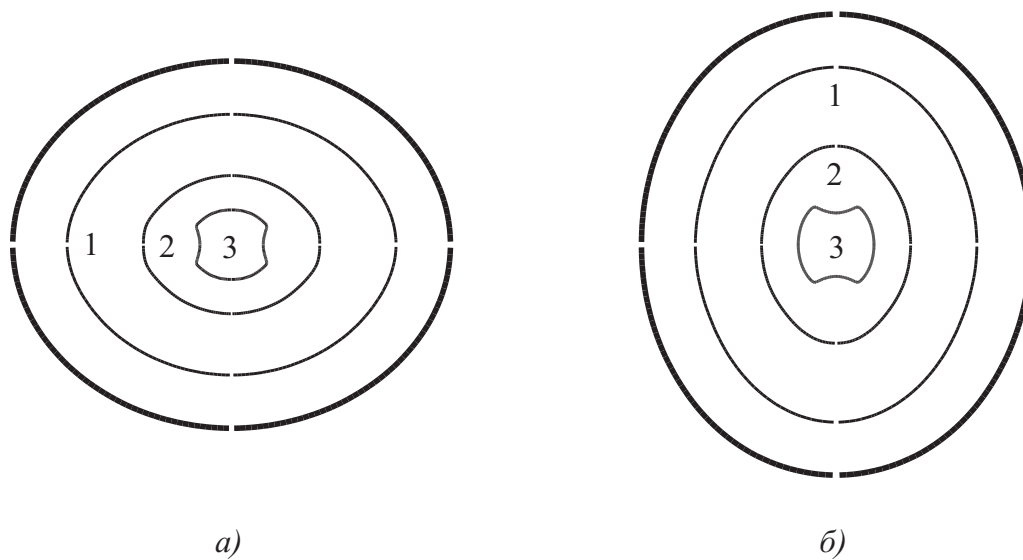


Рис. 2: Начальная стадия схождения ударной волны к центру пузырька. Тонкими сплошными линиями обозначена поверхность ударной волны в моменты 1-3, а жирной сплошной линией — поверхность пузырька в момент 1. Начальная несферичность пузырька  $\varepsilon_2^0 = +0.0033$  (а),  $\varepsilon_2^0 = -0.0033$  (б).

На рис. 2 видно, что ударная волна возникает около поверхности пузырька, поэтому в момент 1 ее форма близка к форме пузырька. Несферичность ударной волны по мере схождения сильно возрастает. В результате в поверхности ударной волны появляются сначала прямолинейные участки (момент 2), а затем образуются вогнутые участки и заострения (момент 3). В изначально вытянутом пузырьке (рис. 2а) вогнутые участки образуются в боковой поверхности ударной волны, а в изначально сплюснутом пузырьке (рис. 2б) — в ее верхней и нижней частях.

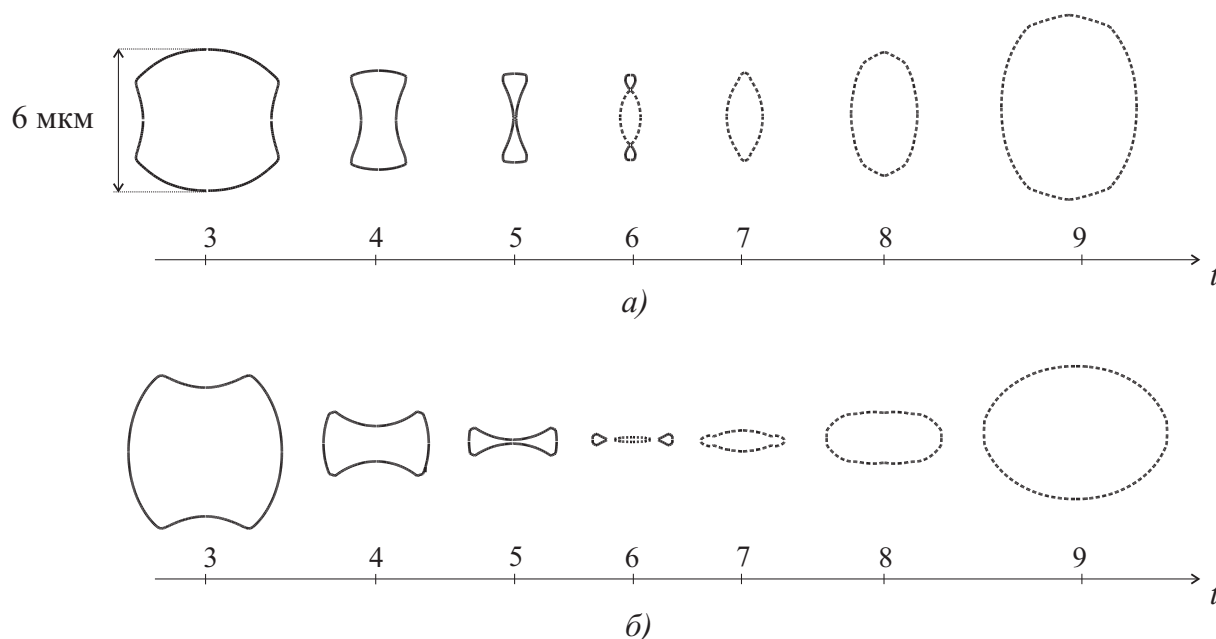


Рис. 3: Финальная стадия схождения ударной волны к центру пузырька (моменты 3–5) и начало ее расхождения после отражения (моменты 6–9). На стадии схождения ударная волна обозначена сплошной линией, а при расхождении после отражения — пунктирной линией. Начальная несферичность пузырька  $\varepsilon_2^0 = +0.0033$  (а),  $\varepsilon_2^0 = -0.0033$  (б).

На рис. 3 показано, что в финале схождения ударной волны ее форма сильно отличается от сферической (моменты 3–5). В результате в момент начала смыкания полости ударной волны (момент 5) в изначально вытянутом пузырьке (рис. 3а) ударная волна имеет гантелеподобную форму, а в изначально сплюснутом пузырьке (рис. 3б) — дискообразную форму. Причем, если при фокусировке сферической ударной волны имеет место одновременное столкновение в центре пузырька всех точек поверхности ударной волны, то при фокусировке несферической ударной волны сценарий другой. В случае  $\varepsilon_2^0 = +0.0033$  в центре пузырька сталкивается сначала боковая часть поверхности ударной волны, начиная с точек, расположенных в плоскости симметрии  $\theta = \pi/2$ . В случае  $\varepsilon_2^0 = -0.0033$  сталкиваются сначала верхние и нижние части ударной волны, начиная с точек, расположенных в окрестности оси симметрии. В обоих случаях в дальнейшем полость ударной волны делится на две равные части, а между ними образуется отраженная ударная волна (момент 6). Затем, полость ударной волны захлопывается, а отраженная ударная волна двигается от центра пузырька к его поверхности (моменты 7–9). Видно, что отраженная волна сначала также является сильно несферической. Однако, по мере распространения от центра пузырька ее несферичность уменьшается.

### 3. Заключение.

Для численного моделирования радиального схождения и фокусировки несферической ударной волны в полости кавитационного пузырька предложена новая методика расчета. Ее работоспособность показа-

на на примере задачи о фокусировке ударной волны, возникающей в сфероидальном пузырьке при его сильном сжатии в жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Taleyarkhan R.P. et. al** Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. — 2002. — V. 295. — P. 1868–1873.
2. **Evans A.K.** Instability of converging shock waves and sonoluminescence // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 54, № 5. — P. 5004–5011.
3. **Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.** Эволюция малых искажений парового пузырька при его сверхсжатии // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 10. — С. 82–96.
4. **Аганин А.А., Кузнецов В.Б.** Метод консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек произвольных сеток // Динамика оболочек в потоке. — Труды семинара. — Казань: КФТИ КФАН СССР. — 1985. — № 18. — С. 144–160.

#### REFERENCES

1. **Taleyarkhan R.P. et. al** Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. — 2002. — V. 295 — P. 1868–1873.
2. **Evans A.K.** Instability of converging shock waves and sonoluminescence // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 54, № 5. — P. 5004–5011.
3. **Aganin A.A., Toporkov D.Yu., Khalitova T.F., Khismatullina N.A.** Evolution of a small sphericity distortion of a vapor bubble during its supercompression // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — V. 4, № 3. — P. 344–354.
4. **Aganin A.A., Kuznetsov V.V.** The method of conservative interpolation of cells parameters of free grids [Metod konservativnoy interpoliyacii integral'nykh parametrov yacheek proizvol'nykh setok] // Dinamica obolochek v potoke. — Trudy seminar. — Kazan: KFTI KFAN USSR. — 1985. — № 18. — P. 144–160. (in Russian)